

Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2013 session 2014

Note : Cette correction n'est pas la correction officielle. N'hésitez pas à signaler si vous constatez des erreurs.

EXERCICE 1 :

Dans cet exercice, quatre affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse et justifier la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On calcule la somme des deux numéros obtenus.

Affirmation 1 :

Les probabilités d'obtenir un résultat pair ou un résultat impair sont égales.

VRAI : Les possibilités pour les sommes sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 soit 6 nombres pairs et 5 nombres impairs.

Mais on a dans tous les cas pour la somme des deux dés 3 chances d'avoir un nombre pair et 3 chances d'avoir un nombre impair. Exemple avec 1 pour le premier dé :

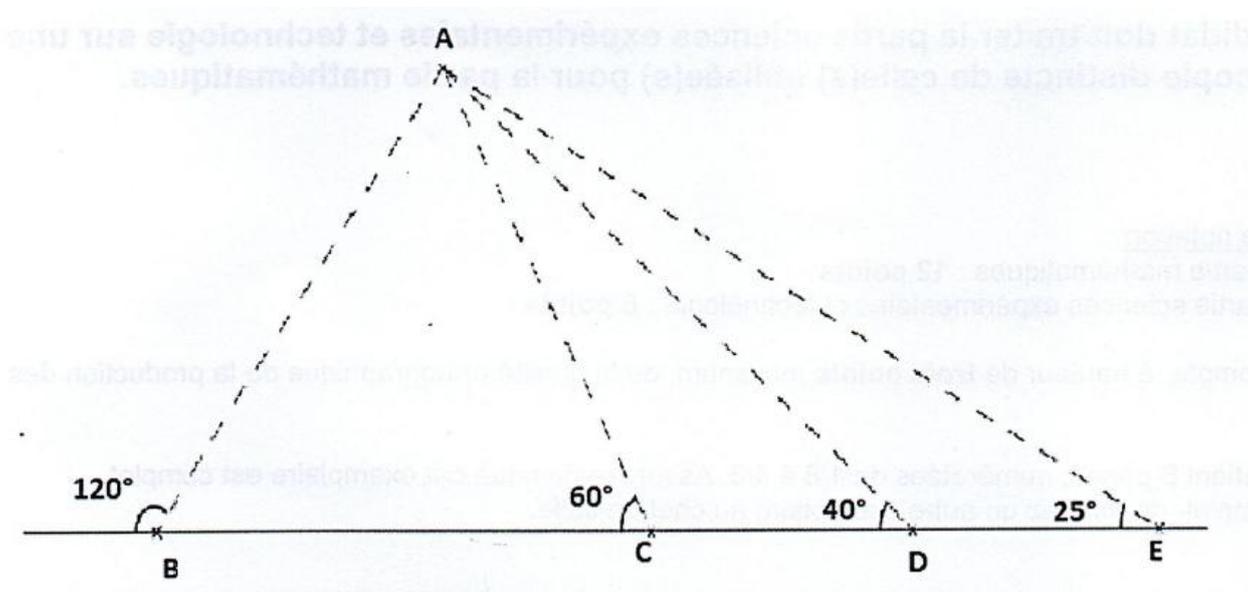
1 ^{er} dé	2 ^{ème} dé	Somme
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
1	6	7

Les chances d'obtenir un résultat pair sont donc égales à celles d'obtenir un résultat impair, à savoir 18/36.

2. Dans la figure ci-dessous, les points B, C, D et E sont alignés. Des mesures d'angle sont indiquées.

Affirmation 2 :

Le triangle ABE est rectangle en A.



FAUX : On obtient l'angle ABE grâce à l'angle plat $180 - 120 = 60^\circ$. Or dans un triangle, la somme des angles est égale à 180° donc $\overset{\wedge}{BAE} = 180 - (\overset{\wedge}{ABE} + \overset{\wedge}{BEA}) = 180 - (60 + 25) = 95^\circ$. Le triangle ABE n'est donc pas rectangle en A.

3. Affirmation 3 :

Un robinet qui permet de remplir un récipient de 125 litres en 2 minutes et 30 secondes a un débit de 3 mètres cube par heure.

VRAI : On commence par les conversions $3 \text{ m}^3 = 3000 \text{ l}$, $2 \text{ min } 30 \text{ s} = 150 \text{ s}$, $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$.

Puis on fait un produit en croix :

$$125 \text{ l} \rightarrow 150 \text{ s}$$

$$x \text{ l} \rightarrow 3600 \text{ s}$$

$$\text{d'où } x = (3600 \times 125) / 150 = 3000 \text{ l} = 3 \text{ m}^3$$

4. Affirmation 4 :

On peut trouver un entier qui ne s'écrit qu'avec des chiffres 9 et qui est multiple de 81.

VRAI : 999999999 (neuf fois le chiffre 9 = 81) / 81 = 12345679

EXERCICE 2 :

Une suite de Syracuse est une suite de nombres entiers construite de la manière suivante :

- le premier terme de cette suite est un nombre entier naturel arbitrairement choisi ;
- si ce nombre est pair, on le divise par 2 et on obtient le terme suivant de la suite ;
- sinon, on le multiplie par 3, on ajoute 1 au résultat et on obtient le terme suivant de la suite ;
- on itère la procédure avec le nombre obtenu pour construire les termes suivants.

Voici, en exemple, les cinq premiers termes de la suite de Syracuse commençant par 7 :

$$7 - 22 - 11 - 34 - 17$$

1.

- Donner les dix premiers termes de la suite de Syracuse dont le premier terme est 3.
- Donner les dix premiers termes de la suite de Syracuse dont le premier terme est 5.
- Donner les dix premiers termes de la suite de Syracuse dont le premier terme est 6.
- À partir des trois exemples précédents, quelle conjecture peut-on faire ? (On ne cherchera pas à démontrer cette conjecture.)

1.

a) $3 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1 - 4 - 2$

b) $5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1 - 4 - 2 - 1 - 4$

c) $6 - 3 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1 - 4$

d) Il semble que la suite tende vers un cycle infini $4 - 2 - 1$ (cycle trivial)

La suite est divergente.

2. On dira que deux suites de Syracuse sont différentes si elles n'ont pas le même premier terme.

- Donner le premier terme de deux suites de Syracuse différentes ayant comme deuxième terme 10.
- Peut-on trouver trois suites de Syracuse différentes ayant le même deuxième terme ? Justifier.

2.

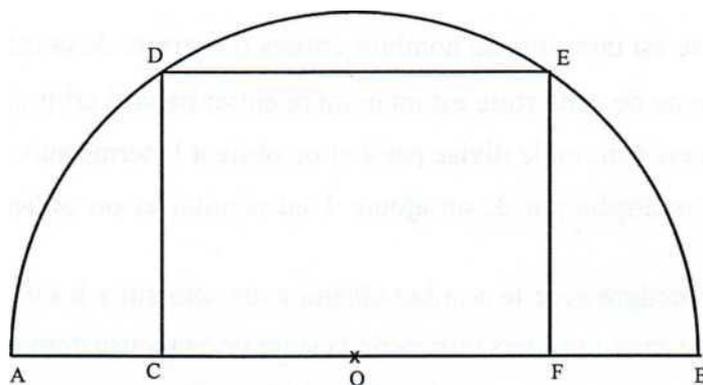
a) 20 (on fait l'inverse donc 10×2) ou 3 ($(10-1) / 3$)

b) Non puisqu'on a que deux possibilités : soit le terme précédent est pair et on le multiplie par 2, soit il est impair et on multiplie par 3 et on additionne 1.

3. Dans une suite de Syracuse, un nombre impair peut-il être suivi par un nombre impair ? Justifier la réponse donnée.

Si on a un nombre impair, on le multiplie par 3 qui est un nombre impair, ce produit est impair (le produit des deux impairs est un impair), et on ajoute 1, donc le nombre suivant un impair est obligatoirement pair. Un nombre impair ne peut pas être suivi par un nombre impair.

EXERCICE 3 :



On considère un demi-cercle de centre O, de rayon 5 cm et de diamètre le segment [AB] (le dessin ci-dessus n'est pas en vraie grandeur).

On étudie les rectangles CDEF tels que le point C appartient au segment [AO], le point F au segment [OB] et les points D et E appartiennent au demi-cercle.

Le rectangle CDEF peut, dans certains cas particuliers, être aplati. Son aire est alors nulle et son périmètre est égal au double de sa longueur.

1. Montrer que les longueurs OC et OF sont égales.

D et E sont des points du cercle donc $OD = OE$. Or OCD et OFE sont des triangles rectangles et $DC = EF$ (car CDEF est un rectangle), donc d'après le théorème de Pythagore : $OC = OF$.

2. Quelles sont la plus petite valeur et la plus grande valeur possible de OC ?

Plus petite valeur = 0 cm ; Plus grande valeur = 5 cm

3. Calculer l'aire et le périmètre du rectangle CDEF avec $OC = 3$ cm.

$OC = 3 = OF$ d'où $CF = 6$. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle OEF rectangle en F :

$$OE^2 = OF^2 + EF^2 \rightarrow EF^2 = OE^2 - OF^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow EF = 4.$$

$$\text{Aire} = \text{longueur} \times \text{largeur} = 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Périmètre} = 2 \times \text{longueur} + 2 \times \text{largeur} = 2 \times 6 + 2 \times 4 = 20 \text{ cm}.$$

On note désormais $OC = x$ cm.

1. Dans cette question, on suppose que le point C est distinct du point A et du point O.

- a) Montrer que $CD = \sqrt{25 - x^2}$ cm.

- b) Calculer en fonction de x le périmètre et l'aire du rectangle CDEF.

- c) Existe-t-il des valeurs de x telles que le rectangle CDEF soit un carré ? Si oui, calculer l'aire et le périmètre de celui-ci.

1. a) Dans le triangle OCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 \rightarrow CD^2 = OD^2 - OC^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2 \rightarrow CD = \sqrt{25 - x^2}$$

b) Périmètre = 2 fois $(2x + \sqrt{25 - x^2})$ – Aire = $x\sqrt{25 - x^2}$

c) CDEF est un carré si $CD = 2 \times OC = 2x$ donc si $\sqrt{25 - x^2} = 2x$, on applique la fonction carré des deux côtés :

$$(\sqrt{25 - x^2})^2 = (2x)^2 \rightarrow 25 - x^2 = 4x^2 \rightarrow 5x^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25/5}$$

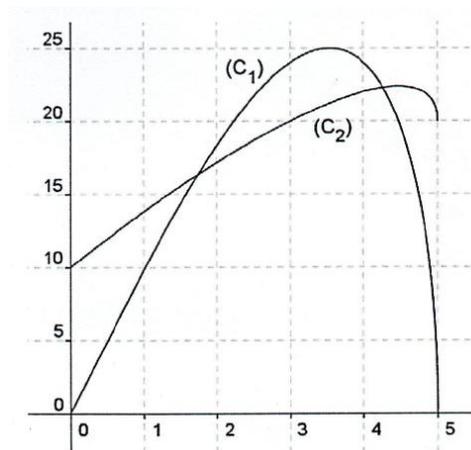
Si $x = \sqrt{25/5}$, CDEF est un carré.

Pour l'aire et le périmètre, on utilise les résultats trouvés en b :

$$\text{Aire} = \sqrt{\frac{25}{5}}x\sqrt{25 - \frac{25}{5}} = \sqrt{5}x\sqrt{30} = \sqrt{5}x\sqrt{5 \times 6} = 5\sqrt{6}$$

$$\text{Périmètre} = 4\sqrt{5} + \sqrt{30}$$

5. On a représenté les variations en fonction de x de l'aire et du périmètre du rectangle CDEF.



a) Laquelle de ces deux courbes (C₁) et (C₂) représente les variations du périmètre ? Laquelle représente les variations de l'aire ? Justifier.

C₁ représente les variations de l'aire (qui peut être nulle contrairement au périmètre C₂).

b) Peut-on affirmer que l'aire du rectangle CDEF augmente lorsque son périmètre augmente ?

Non, puisqu'on voit sur les courbes qu'à $x = 4$ cm, le périmètre du rectangle augmente mais son aire diminue.

6. On appelle x_1 la valeur de x qui permet d'obtenir le rectangle CDEF de périmètre maximal et x_2 la valeur de x qui permet d'obtenir le rectangle CDEF d'aire maximale.
 Afin de déterminer x_1 et x_2 on a construit, à l'aide d'un tableur, le tableau suivant :

	A	B	C
1	x	périmètre	aire
2	0	10	0
3	0,5	11,94987437	4,974937186
4	1	13,79795897	9,797958971
5	1,5	15,53939201	14,30908802
6	2	17,16515139	18,33030278
7	2,5	18,66025404	21,65063509
8	3	20	24
9	3,5	21,14142843	24,9949995
10	4	22	24
11	4,5	22,35889894	19,61504525
12	5	20	0

Dans ce tableur la fonction racine carrée se note RACINE ().

- Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B.
- Donner une formule qui, entrée dans la cellule C2 et recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne C.
- Pour obtenir un résultat encore plus précis pour x_1 , on complète le précédent tableau avec le tableau suivant :

x	périmètre
4	22
4,1	22,12363521
4,2	22,22586399
4,3	22,30294033
4,4	22,34973683
4,5	22,35889894
4,6	22,31918359
4,7	22,21174442
4,8	22
4,9	21,58997487
5	20

Donner l'encadrement de x_1 , que permet d'obtenir ce tableau.

6. a) $B2 = 2 * (2 * A2 + RACINE (25 - A2 * A2))$

b) $C2 = A2 * RACINE (25 - A2 * A2)$

c) $4,4 < x < 4,6$, en effet on ne sait pas si le maximum du perimetre se trouve entre 4,4 et 4,5 ou entre 4,5 et 4,6.